Interpolación de la función módulo mediante polinomios de Lagrange

Pauline Morrison Fell

02 de mayo de 2006

1. Introducción

Interpolación es el método mediante el cual se puede llegar a estimar un valor desconocido de una función de la cual sólo se conoce una serie de valores en puntos cercanos.

Dados los datos tabulados:

$$\{(x_i; f_i)\} \qquad i = 0, 1, ..., n$$

se llama interpolación polinómica a hallar el polinomio de grado n tal que se cumpla:

$$P_n(x_i) = f_i \qquad i = 0, 1, ..., n$$

1.1. Interpolación de Lagrange

El matemático francés Joseph Louis Lagrange descubrió que se puede encontrar un polinomio interpolante de grado menor o igual que n, que sea combinación lineal de los valores de los $n + 1$ puntos en la función.

Este polinomio tiene la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \, L_{n,k}(x) \tag{1}$$

donde $L_{n,k}$ es el polinomio coeficiente de Lagrange para los nodos $x_0, x_1, ..., x_n$ definido por:

$$L_{n,k}(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \tag{2}$$

Un calculo sensillo permite demostrar que, para cada k fijo, $L_{n,k}(x)$ cumple que:

$$L_{n,k}(x_j) = 1 \qquad si\ j = k$$

$$L_{n,k}(x_j) = 0 \qquad si\ j \neq k$$

El error $E_n(x)$ está dado por la fórmula:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)......(x-x_n) \tag{3}$$

1.2. El fenómeno de Runge

Este fenómeno se refiere a funciones para las que la sucesión $P_n(x)$ no converge. Analizando la forma que tiene el error $E_n(x)$ para polinomios de Lagrange, si no puede acotarse la derivada n-ésima o, si los valores de las derivadas altas de la función son grandes, entonces el máximo del término del error crece cuando $n \to \infty$, en vez de acercarse a cero.

Este problema se presenta sólo cuando se utiliza nodos equiespaciados. En general, puede probarse que, para funciones continuas con primera derivada continua en [-1,1], si se utilizan los nodos de Chebyshev, el error tiende a cero cuando $n \to \infty$.

1.3. Nodos de Chebyshev

P.L.Chebyshev resolvió el problema de cómo seleccionar los nodos x_k que minimizen el valor máximo del polinomio:

$$Q(x) = (x-x_0)(x-x_1)......(x-x_n) \qquad x \in [-1,1] \tag{4}$$

Conociendo los polinomios de este matemático, se puede demostrar que los nodos a seleccionar son las raíces de los mismos, y pueden calcularse a través de una única fórmula:

$$x_k = cos\left(\frac{(2k+1)}{2(n+1)}\pi\right) \tag{5}$$

1.4. Sobre las secciones a continuación

En las secciones 2 y 3 voy a calcular el polinomio de interpolación de Lagrange de grados n=10, 15, 20 de la función módulo:

$$f(x) = |x| \qquad x \in [-1,1] \tag{6}$$

tomando puntos equiespaciados, y nodos de Chebyshev.

En la sección 4 voy a comparar y extraer conclusiones sobre la cantidad de puntos utilizados en cada método, y voy a analizar cuál de los dos es el más aproximado.

2. Interpolación con puntos equiespaciados

Para calcular los polinomios de interpolación de Lagrange de la función módulo (6), primero determiné los nodos equiespaciados con su valor asociado, para n=10, 15 y 20 (ver tabla 1 en Anexo).

Siendo:

$$x_i = x_0 + ih \qquad x_0 = -1 \tag{7}$$

tomando para cada n:

$$h_{10} = 0{,}2 \qquad h_{15} = 0{,}13 \qquad h_{20} = 0{,}1 \tag{8}$$

y

$$f_i = f(x_i) = |x_i| \tag{9}$$

Luego reemplazé estos valores determinados para cada n, en la fórmula del polinomio de Lagrange (1) y (2).

Para n=10 se obtiene:

$$\begin{aligned} P_{10}(x) = {} & 1\,L_{10,0}(x) + 0{,}8\,L_{10,1}(x) + 0{,}6\,L_{10,2}(x) + 0{,}4\,L_{10,3}(x) + \\ & +0{,}2\,L_{10,4}(x) + 0{,}2\,L_{10,6}(x) + 0{,}4\,L_{10,7}(x) + 0{,}6\,L_{10,8}(x) + \\ & +0{,}8\,L_{10,9}(x) + 1\,L_{10,10}(x) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
L_{10,0}(x) &= \frac{1}{-0{,}37159}(x+0{,}8)(x+0{,}6)(x+0{,}4)(x+0{,}2)(x)(x-0{,}2) \\
&\qquad (x-0{,}4)(x-0{,}6)(x-0{,}8)(x-1) \\
L_{10,1}(x) &= \frac{1}{0{,}046449}(x+1)(x+0{,}6)(x+0{,}4)(x+0{,}2)(x)(x-0{,}2) \\
&\qquad (x-0{,}4)(x-0{,}6)(x-0{,}8)(x-1) \\
L_{10,2}(x) &= \frac{1}{-03013763}(x+1)(x+0{,}8)(x+0{,}4)(x+0{,}2)(x)(x-0{,}2) \\
&\qquad (x-0{,}4)(x-0{,}6)(x-0{,}8)(x-1) \\
L_{10,3}(x) &= \frac{1}{0{,}0077414}(x+1)(x+0{,}8)(x+0{,}6)(x+0{,}2)(x)(x-0{,}2) \\
&\qquad (x-0{,}4)(x-0{,}6)(x-0{,}8)(x-1) \\
L_{10,4}(x) &= \frac{1}{-0{,}0088474}(x+1)(x+0{,}8)(x+0{,}6)(x+0{,}4)(x)(x-0{,}2) \\
&\qquad (x-0{,}4)(x-0{,}6)(x-0{,}8)(x-1) \\
L_{10,6}(x) &= \frac{1}{0{,}0088474}(x+1)(x+0{,}8)(x+0{,}6)(x+0{,}4)(x+0{,}2)(x) \\
&\qquad (x-0{,}4)(x-0{,}6)(x-0{,}8)(x-1) \\
L_{10,7}(x) &= \frac{1}{-0{,}0077414}(x+1)(x+0{,}8)(x+0{,}6)(x+0{,}4)(x+0{,}2)(x) \\
&\qquad (x-0{,}2)(x-0{,}6)(x-0{,}8)(x-1) \\
L_{10,8}(x) &= \frac{1}{0{,}013763}(x+1)(x+0{,}8)(x+0{,}6)(x+0{,}4)(x+0{,}2)(x) \\
&\qquad (x-0{,}2)(x-0{,}4)(x-0{,}8)(x-1) \\
L_{10,9}(x) &= \frac{1}{-0{,}046449}(x+1)(x+0{,}8)(x+0{,}6)(x+0{,}4)(x+0{,}2)(x)
\end{aligned}$$

$$L_{10,10}(x) = \frac{1}{0{,}37159}(x+1)(x+0{,}8)(x+0{,}6)(x+0{,}4)(x+0{,}2)(x)(x-0{,}2)(x-0{,}4)(x-0{,}6)(x-0{,}8) \quad (11)$$

Los polinomios para 15 y 20 puntos se pueden calcular reemplazando (1) y (2) de la misma forma, con sus respectivos valores.

3. Interpolación con nodos de Chebyshev

Calculé los nodos de Chebyshev utilizando la fórmula (5) con n=10, 15 y 20 (ver tabla 2 en Anexo). Luego reemplazé los nodos y sus respectivos valores de la función módulo, en las fórmulas (1) y (2) para calcular los polinomios interpolantes.

Para n=10 se obtiene:

$$\begin{aligned} P_{10}(x) = {} & 0{,}98982\, L_{10,0}(x) + 0{,}90963\, L_{10,1}(x) + 0{,}75575\, L_{10,2}(x) + \\ & +0{,}54064\, L_{10,3}(x) + +0{,}28173\, L_{10,4}(x) + 0{,}28173\, L_{10,6}(x) + \\ & +0{,}54064\, L_{10,7}(x) + 0{,}75575\, L_{10,8}(x) + 0{,}90963\, L_{10,9}(x) + \\ & +0{,}98982\, L_{10,10}(x) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} L_{10,0}(x) = {} & \frac{1}{-0{,}076254}(x+0{,}90963)(x+0{,}75575)(x+0{,}54064) \\ & (x+0{,}28173)(x)(x-0{,}28173)(x-0{,}54064)(x-0{,}75575)(x-0{,}90963)(x-0{,}98982) \\ L_{10,1}(x) = {} & \frac{1}{0{,}028425}(x+0{,}98982)(x+0{,}75575)(x+0{,}54064) \\ & (x+0{,}28173)(x)(x-0{,}28173)(x-0{,}54064)(x-0{,}75575)(x-0{,}90963)(x-0{,}98982) \\ L_{10,2}(x) = {} & \frac{1}{-0{,}021705}(x+0{,}98982)(x+0{,}90963)(x+0{,}54064) \\ & (x+0{,}28173)(x)(x-0{,}28173)(x-0{,}54064)(x-0{,}75575)(x-0{,}90963)(x-0{,}98982) \\ L_{10,3}(x) = {} & \frac{1}{0{,}023620}(x+0{,}98982)(x+0{,}90963)(x+0{,}75575) \\ & (x+0{,}28173)(x)(x-0{,}28173)(x-0{,}54064)(x-0{,}75575)(x-0{,}90963)(x-0{,}98982) \\ L_{10,4}(x) = {} & \frac{1}{-0{,}039739}(x+0{,}98982)(x+0{,}90963)(x+0{,}75575) \\ & (x+0{,}54064)(x)(x-0{,}28173)(x-0{,}54064)(x-0{,}75575)(x-0{,}90963)(x-0{,}98982) \\ L_{10,6}(x) = {} & \frac{1}{0{,}039739}(x+0{,}98982)(x+0{,}90963)(x+0{,}75575)(x+0{,}54064) \\ & (x+0{,}28173)(x)(x-0{,}54064)(x-0{,}75575)(x-0{,}90963)(x-0{,}98982) \\ L_{10,7}(x) = {} & \frac{1}{-0{,}023419}(x+0{,}98982)(x+0{,}90963)(x+0{,}75575)(x+0{,}54064) \end{aligned}$$

$$(x+0{,}28173)(x)(x-0{,}28173)(x-0{,}75575)(x-0{,}90963)(x-0{,}98982)$$

$$L_{10,8}(x) = \frac{1}{0{,}021705}(x+0{,}98982)(x+0{,}90963)(x+0{,}75575)(x+0{,}54064)$$

$$(x+0{,}28173)(x)(x-0{,}28173)(x-0{,}54064)(x-0{,}90963)(x-0{,}98982)$$

$$L_{10,9}(x) = \frac{1}{-0{,}028427}(x+0{,}98982)(x+0{,}90963)(x+0{,}75575)(x+0{,}54064)$$

$$(x+0{,}28173)(x)(x-0{,}28173)(x-0{,}54064)(x-0{,}75575)(x-0{,}98982)$$

$$L_{10,10}(x) = \frac{1}{0{,}076258}(x+0{,}98982)(x+0{,}90963)(x+0{,}75575)(x+0{,}54064)$$

$$(x+0{,}28173)(x)(x-0{,}28173)(x-0{,}54064)(x-0{,}75575)(x-0{,}90963) \quad (13)$$

Los polinomios para 15 y 20 puntos se pueden calcular reemplazando (1) y (2) de la misma forma, con sus respectivos valores.

4. Resultados y conclusiones

Utilizando Octave, grafiqué los distintos polinomios en el intervalo [-1,1].

La figura (1) muestra la representación de la función módulo junto con los tres polinomios de Lagrange calculados con 10, 15 y 20 puntos equiespaciados. Se puede observar claramente que, a mayor cantidad de nodos usados, aparecen oscilaciones cada vez más grandes cerca de los extremos del intervalo. Estos resultados se corresponden con el fenómeno de Runge. La función módulo no tiene derivadas continuas, por lo tanto no puede acotarse el error dado por la fórmula (3).

La figura (2) muestra la representación de la función módulo junto con los tres polinomios de Lagrange calculados con 10, 15 y 20 nodos de Chebyshev. La aproximación lograda utilizando estos nodos es bastante cercana a la función original en todo el intervalo, sin importar la cantidad de puntos usados en la interpolación. Es interesante ver que, aunque la función analizada no tiene ni la primera derivada continua en el intervalo [-1, 1], aun así la interpolación utilizando estos nodos resulta bastante buena.

Las figuras (3), (4) y (5) comparan, para cada set de nodos, la interpolación con absisas equiespaciadas y nodos de Chebyshev. Resulta evidente que la interpolación utilizando los nodos de Chebyshev contiene menos error que la correspondiente a los nodos equiespaciados, y se evita el fenómeno de Runge en los extremos del intervalo.

5. Bibliografía

Métodos Numéricos con Matlab John H. Mathews y Kurtis D. Fink - Prentice Hall, España

6. Anexo

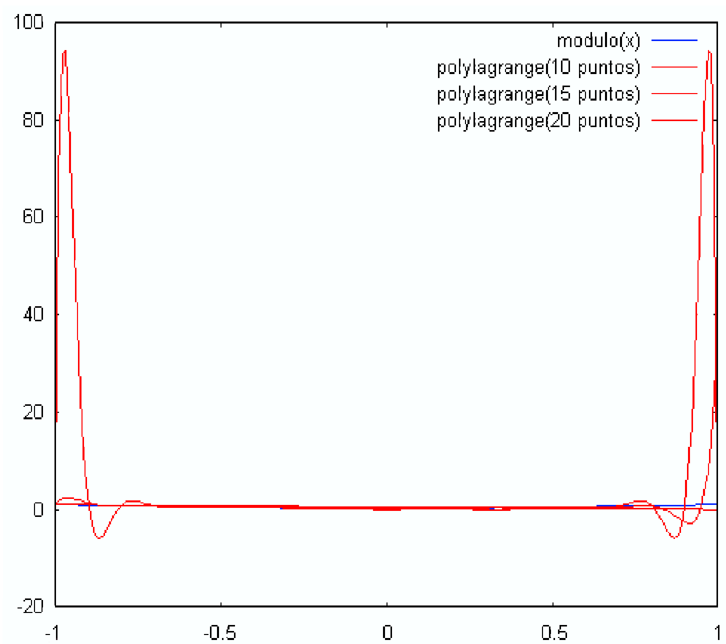

Figura 1: Polinomios de Lagrange con 10, 15 y 20 nodos equiespaciados.

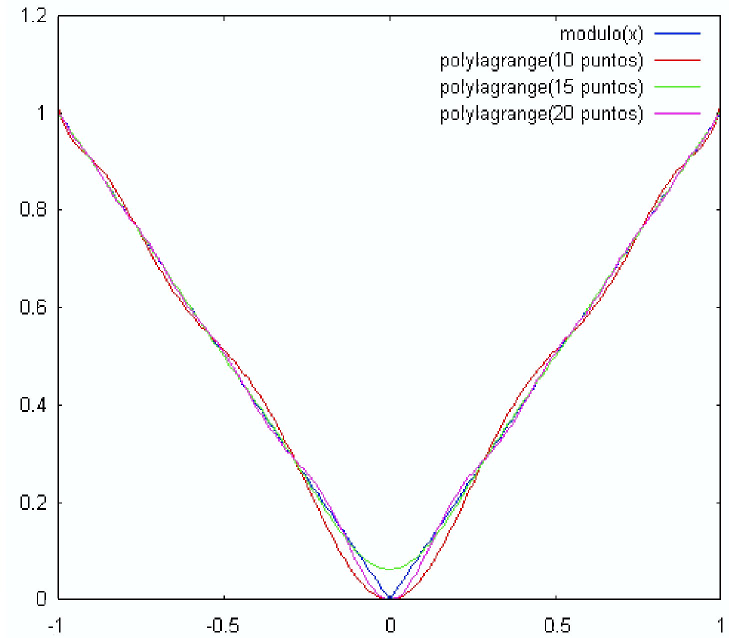

Figura 2: Polinomios de Lagrange con 10, 15 y 20 nodos de Chebyshev.

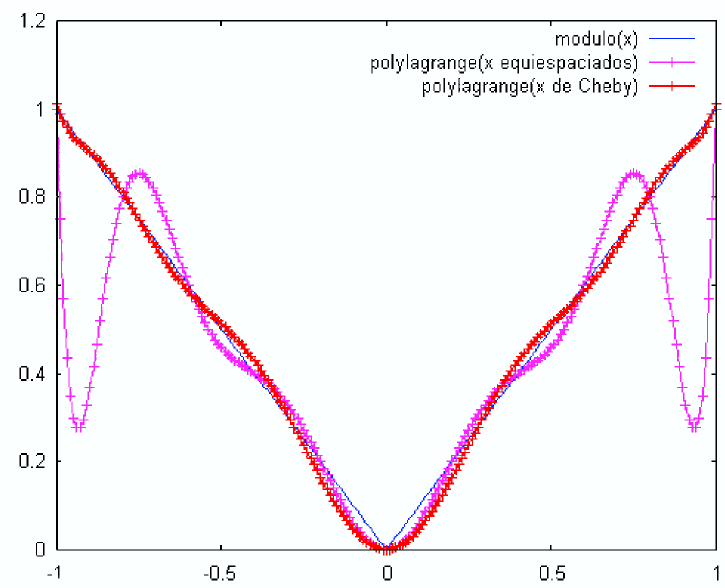

Figura 3: Polinomios de Lagrange con 10 nodos.

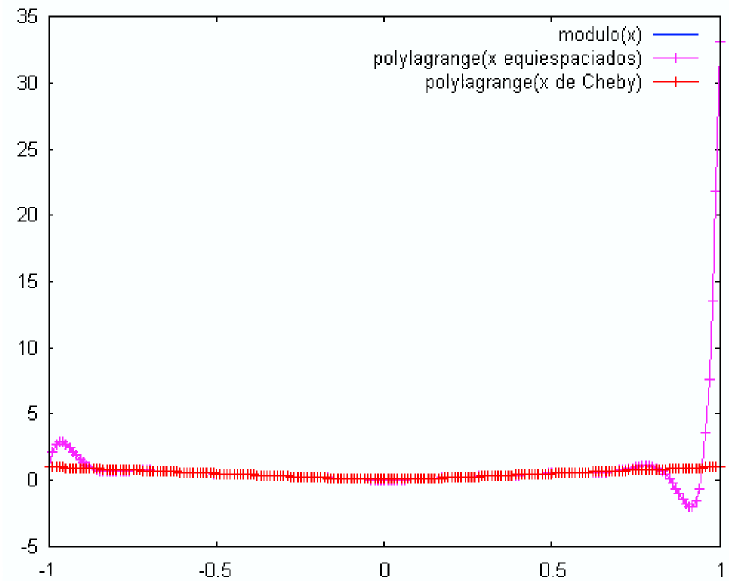

Figura 4: Polinomios de Lagrange con 15 nodos.

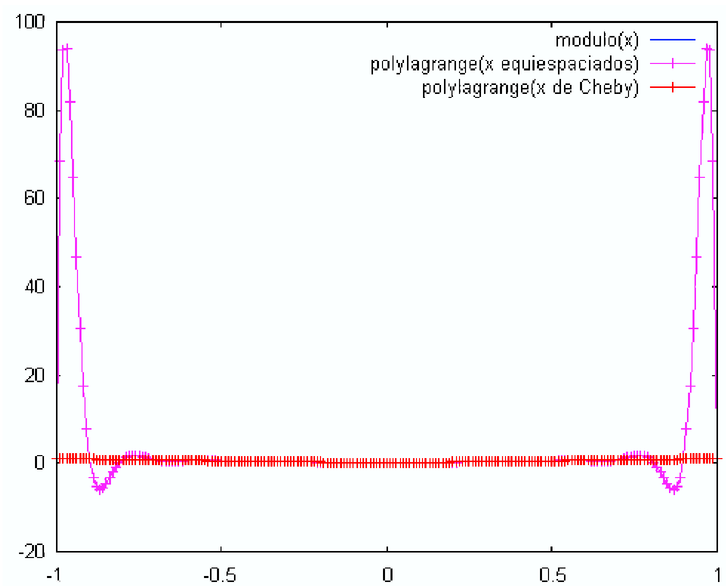

Figura 5: Polinomios de Lagrange con 20 nodos.

Cuadro 1: (x_i ; f_i) con nodos equiespaciados

n=10, h=0.2		n=15, h=0.13		n=20, h=0.1	
x_i	f_i	x_i	f_i	x_i	f_i
-1	1	-1	1	-1	1
-0.8	0.8	-0.87	0.87	-0.9	0.9
-0.6	0.6	-0.74	0.74	-0.8	0.8
-0.4	0.4	-0.61	0.61	-0.7	0.7
-0.2	0.2	-0.48	0.48	-0.6	0.6
0	0	-0.35	0.35	-0.5	0.5
0.2	0.2	-0.22	0.22	-0.4	0.4
0.4	0.4	-0.09	0.09	-0.3	0.3
0.6	0.6	0.04	0.04	-0.2	0.2
0.8	0.8	0.17	0.17	-0.1	0.1
1	1	0.30	0.30	0	0
		0.43	0.43	0.1	0.1
		0.56	0.56	0.2	0.2
		0.69	0.69	0.3	0.3
		0.82	0.82	0.4	0.4
		0.95	0.95	0.5	0.5
				0.6	0.6
				0.7	0.7
				0.8	0.8
				0.9	0.9
				1	1

Cuadro 2: (x_i ; f_i) con nodos de Chebyshev

n=10		n=15		n=20	
x_i	f_i	x_i	f_i	x_i	f_i
-0.98982	0.98982	-0.995185	0.995185	-0.99720	0.99720
-0.90963	0.90963	-0.956940	0.956940	-0.97493	0.97493
-0.75575	0.75575	-0.881921	0.881921	-0.93087	0.93087
-0.54064	0.54064	-0.773010	0.773010	-0.86603	0.86603
-0.28173	0.28173	-0.634393	0.634393	-0.78183	0.78183
0	0	-0.471397	0.471397	-0.68017	0.68017
0.28173	0.28173	-0.290285	0.290285	-0.56332	0.56332
0.54064	0.54064	-0.098017	0.098017	-0.43388	0.43388
0.75575	0.75575	0.098017	0.098017	-0.29476	0.29476
0.90963	0.90963	0.290285	0.290285	-0.14904	0.14904
0.98982	0.98982	0.471397	0.471397	0	0
		0.634393	0.634393	0.14904	0.14904
		0.773010	0.773010	0.29476	0.29476
		0.881921	0.881921	0.43388	0.43388
		0.956940	0.956940	0.56332	0.56332
		0.995185	0.995185	0.68017	0.68017
				0.78183	0.78183
				0.86603	0.86603
				0.93087	0.93087
				0.97493	0.97493
				0.99720	0.99720